**Duale Simplex-Methode (Standardform)**

**Input:** Simplextableau mit dual zulässiger (= optimaler) Ausgangslösung

**Output:** Simplextableau mit optimaler und primal zulässiger Basislösung oder dem Nachweis, daß keine zulässige Lösung existiert.

**Vereinbarung:** Umgerechnete Koeffizienten sind durch einen Stern (*) gekennzeichnet.

**Schritt 1:** Auswahl der Pivotzeile $r$

Es sei $b_r = \min_i b_i$

Falls $b_r \geq 0$ ist, dann ist eine zulässige Lösung erreicht; die Rechnung ist beendet.

Andernfalls wähle die Zeile $r$ als Pivotzeile.

**Schritt 2:** Auswahl der Pivotspalte $s$

Berechne: $-\frac{d_s}{a_{rs}} = \min_j \left\{ -\frac{d_j}{a_{rj}} \,\middle|\, a_{rj} < 0 \right\}$

Wähle Spalte $s$ als Pivotspalte. Bei mehreren minimalen Quotienten wähle die Spalte $s$ unter den entsprechenden Zeilen beliebig aus.

Falls kein $a_{rj} < 0$ existiert, gibt es keine zulässige Lösung; die Rechnung endet.

**Schritt 3:** Pivotoperation bzgl. $a_{rs} < 0$

3.1: Pivotzeile $r$

$a^*_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rs}}$ für alle $j \neq s$ , $\qquad b^*_r = \frac{b_r}{a_{rs}}$

3.2: Pivotspalte $s$

$a^*_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{rs}}$ für alle $i \neq r$ , $\qquad d^*_s = -\frac{d_s}{a_{rs}}$

3.3: Pivotelement

$a^*_{rs} = \frac{1}{a_{rs}}$

3.4: Alle übrigen Elemente

$a^*_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} = a_{ij} - a_{is} \cdot a^*_{rj}$ für alle $i \neq r$ und $j \neq s$

$b^*_i = b_i - \frac{a_{is} \cdot b_r}{a_{rs}} = b_i - a_{is} \cdot b^*_r$ für alle $i \neq r$

$d^*_j = d_j - \frac{d_s \cdot a_{rj}}{a_{rs}} = d_j - d_s \cdot a^*_{rj}$ für alle $j \neq s$

$z^*_0 = z_0 - \frac{d_s \cdot b_r}{a_{rs}} = z_0 - d_s \cdot b^*_r$

3.5: Vertauschung der Variablen

Tausche $x_r$ gegen $x_s$ und gehe nach Schritt 1.

☐ **Beispiel:** Gesucht ist die Lösung des nachstehenden Minimierungsproblems.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{Min} & z & & & & & \\
\text{mit} & z = & 2x_1 & +4x_2 & +5x_3 & & \\
\text{u.d.N.} & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \geq 9 \\
 & & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \geq 12 \\
 & & 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \geq 15 \\
 & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

| Max | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| $(-z)$ | 2 | 4 | 5 | 0 |
| $x_4$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-9$ |
| $x_5$ | $-2$ | 3 | $-1$ | $-12$ |
| $x_6$ | $-2$ | $-2$ | $-4$ | $-15$ |

| Max | $x_6$ | $x_2$ | $x_3$ | RS |
|---|---|---|---|---|
| $(-z)$ | 1 | 2 | 1 | $-15$ |
| $x_4$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ |
| $x_5$ | $-1$ | $-1$ | 3 | 3 |
| $x_1$ | $-\frac{1}{2}$ | 1 | $-2$ | $\frac{15}{2}$ |