

6. Investoren handeln rational und ziehen ein größeres Vermögen einem kleineren vor.
7. Bei den betrachteten Optionen handelt es sich um europäische Optionen.
8. Von Dividendenzahlungen wird abstrahiert.

● **Black/Scholes-Differentialgleichung:**

$$\frac{\partial C}{\partial t} + iS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = iC \quad \text{mit } i = r - 1.$$

Die Black/Scholes-Formel läßt sich als kontinuierlicher Grenzfall der binomialen Bewertungsformel interpretieren. Herleitung der Formel zumeist jedoch als Lösung der Black/Scholes-Differentialgleichung.

● **Risikoneutraler Bewertungsansatz:** Bestimmung des Optionspreises als Barwert der erwarteten Optionsendwerte:

$$E(C(T)) = E\left(\max(0, S(T) - K)\right).$$

Aus der Normalverteilungsannahme für $S(T)$ folgt mit der Dichtefunktion f von S

$$f(S(T)) = \frac{1}{S(T)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log S(T) - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

schließlich

$$E(C(T)) = \int_K^\infty (S(T) - K) \frac{1}{S(T)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log S(T) - \mu}{\sigma}\right)^2\right) dS.$$

Transformation von $S(T)$ in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und Berechnung von $E(C(T))$. Beobachtung, daß der arbitragefreie Wert eines Derivats unabhängig von den Risikopräferenzen der Marktteilnehmer bestimmt werden kann, führt zur Folgerung, daß der gesuchte Optionswert als mit dem risikofreien Zinssatz diskontierter Erwartungswert der Optionsendwerte bestimmt werden kann.

Beispielsrechnung zur Black/Scholes-Formel

- Laufzeit $T = 6$ Monate, Basiskurs $K = 480$ DM, Aktienkurs $S = 465$ DM, risikoloser Jahreszinssatz $r = 7\%$. Volatilität wird aus vergangenen Renditen anhand des aktuellen Kurses und der bekannten Wochenschlußkurse der letzten 26 Wochen sukzessive berechnet.

Datum	Kurs S_j	S_j/S_{j-1}	$\log(S_j/S_{j-1})$	$\log(S_j/S_{j-1}) - \mu$	$(\log(S_j/S_{j-1}) - \mu)^2$
05.03.	402.10				
12.03.	408.00	1.014673	.014566	.008976	.000081
19.03.	403.80	.989706	-.010347	-.015937	.000254
26.03.	399.00	.988113	-.011958	-.017548	.000308
02.04.	392.60	.983960	-.016170	-.021760	.000473
08.04.	401.90	1.023688	.023412	.017822	.000318
16.04.	412.20	1.025628	.025305	.019715	.000389
23.04.	405.40	.983503	-.016634	-.022224	.000494
30.04.	397.00	.979280	-.020938	-.026538	.000704
07.05.	399.00	1.005038	.005025	-.000565	.000000
14.05.	395.80	.991980	-.008052	-.013642	.000186
21.05.	405.70	1.025013	.024705	.019115	.000365
28.05.	400.30	.986690	-.013400	-.018990	.000361
04.06.	411.00	1.026730	.026379	.020789	.000432
11.06.	415.20	1.010219	.010167	.004577	.000021
18.06.	415.30	1.000241	.000241	-.005349	.000029