mit x_i als Anteil der Aktie i am Portefeuille.

▷ Bei gegebenen Renditeparametern der einzelnen Aktien (Erwartungswerte, Varianzen, Kovarianzen) ist die Struktur eines Portefeuille vollständig durch die Anteile beschrieben, die in die einzelnen Aktien investiert werden.
Im Grundmodell werden für die x_i keine Obergrenzen oder Nichtnegativitätsbedingungen vorausgesetzt.

– **Erwartungswert der Portefeuille-Rendite**:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i$$

mit μ_i als Erwartungswert der Rendite r_i der Aktie i.

– **Varianz der Portefeuille-Rendite**:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

mit σ_{ij} als Kovarianz der Renditen der Aktien i und j.

– **Portefeuille-Optimierung**: Minimierung der Portefeuille-Varianz σ_p^2 unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \quad \text{und} \quad \bar{\mu}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i \,.$$

▷ Für einen vorgegebenen Erwartungswert der Portefeuille-Rendite $\bar{\mu}_p$ ist die Wertpapiermischung $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ zu finden, die die Varianz der Portefeuille-Rendite minimiert.

a) Lagrange-Ansatz des Portefeuille-Problems

● **Lagrange-Ansatz** zur Lösung der Portefeuille-Optimierung:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i - \bar{\mu}_p \right) - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1 \right) \,.$$

Ableitungen der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i} &= 2 \sum_{j=1}^{N} x_j \sigma_{ij} - \lambda_1 \mu_i - \lambda_2 = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, N \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i - \bar{\mu}_p \right) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i - 1 \right) = 0
\end{aligned}$$

● **Aktienanteile im Optimum**:

$$x_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_{ij} \left(\lambda_1 \mu_j + \lambda_2 \right) \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, N$$

mit $\hat{\sigma}_{ij}$ als Element der Inversen der **Varianz-Kovarianz Matrix**.
Portefeuille-Planung in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \ldots & \sigma_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

Ist die **Varianz-Kovarianz Matrix** invertierbar, dann ist der Vektor der optimalen Portefeuille-Anteile