

Minimierungsziel) aufweist, um die Suche in dessen Nachbarschaft fortzusetzen. Existiert kein besserer Nachbar, so gilt  $s_i$  als lokales Optimum (Minimum) und das Verbesserungsverfahren terminiert.

**Exakte Nachbarschaft:** Eine Nachbarschaft  $N$  heißt dann exakt, wenn jedes lokale Optimum aufgrund der Nachbarschaftsstruktur mit dem globalen Optimum  $s^*$  zusammenfällt, das Gebirge also keine Nebentäler aufweist. Leider sind für viele Problemstellungen nur sehr große Nachbarschaften exakt, für die dann bereits die enumerative Bewertung aller Nachbarn einer einzigen Lösung nicht mehr praktikabel ist.



### Simulated Annealing

Um auch bei nicht exakter Nachbarschaft die Wahrscheinlichkeit des Verfehlens der global optimalen Lösung zu reduzieren, entwickelte Kirkpatrick in Analogie zur Thermodynamik das sogenannte Simulated Annealing (SA; zu deutsch simuliertes Ausglühen).

Unterschiede zu reinen Verbesserungsverfahren:

- Die Nachbarn der augenblicklichen Konfiguration  $s_i$  werden nicht systematisch auf ihren Zielfunktionswert untersucht.  
Aus allen Nachbarn in  $N(s_i)$  wird vielmehr mittels einer gleichverteilten Wahrscheinlichkeit  $P_{ij}^G$  ein Nachbar  $s_j$  ausgewählt.
- Lösung  $s_i$  wird auch zugunsten eines schlechteren Nachbarn  $s_j$  verworfen, allerdings nur mit der Annahmewahrscheinlichkeit  $P_{ij}^A$  (sog. **Metropoliswahrscheinlichkeit**).

$$P_{ij}^A(T) = \begin{cases} 1, & f(s_j) < f(s_i) \\ e^{-\frac{f(s_j)-f(s_i)}{T}}, & f(s_j) \geq f(s_i) \end{cases}$$

Diese hängt außer vom Ausmaß der Zielfunktionsverschlechterung von einer exogenen Variable  $T$  ab, die gemäß der physikalischen Analogie als Temperatur bezeichnet wird. Ist sie sehr groß, gleicht die Suche einem random walk durch den Lösungsraum  $S$ . Wird andererseits  $T$  auf einen Wert nahe null gesetzt, gleicht SA einem reinen Verbesserungsverfahren.

- Die Überlegung des SA besteht nun darin, die Suche mit hohem  $T$  zu beginnen und danach  $T$  im Laufe der Suchschritte, die insgesamt durchgeführt werden, langsam abzusenken.
- SA-Verfahren können grundsätzlich als **Markov-Kette** modelliert werden, wobei die folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten von Zustand  $s_i$  zu Zustand  $s_j$  gelten:

$$P_{ij}(T) = \begin{cases} P_{ij}^G(T) \cdot P_{ij}^A(T), & \forall j \neq i \\ 1 - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{|S|} P_{il}^G(T) \cdot P_{il}^A(T), & j = i \end{cases}$$

- ▷ Die Konvergenz einer Suche mit SA gegen die globalen Optima in  $S$  kann sichergestellt werden, sofern die Abkühlung der Temperatur  $T$  hinreichend langsam vonstatten geht, um die **Ergodizität** der Markov-Kette zu gewährleisten.
- In empirischen Tests zeigte sich aber, daß eine Abkühlung, für die eine Kovergenz garantiert werden kann, meist zu unvertretbar langen Rechenzeiten führt. Allerdings lassen sich auch mit zu schneller Abkühlung fast immer bessere Ergebnisse erzielen als mit der Anwendung klassischer Verbesserungsverfahren.

### Tabu Search

In der Tabu-Suche wird ein anderer Ansatz gewählt, um lokalen Minima zu entkommen: Sind alle Nachbarn einer Lösung schlechter als die augenblickliche Lösung  $s_i$ , wird die Suche mit dem  $s_j$  fortgesetzt, welches die kleinste Verschlechterung bewirkt. Mit Hilfe einer sogenannten Tabu-Liste der letzten  $n$  Lösungen, deren erneutes Aufsuchen untersagt ist, wird das Oszillieren der Suche zwischen dem lokalen Minimum und nur wenigen benachbarten Lösungen vermieden.